Das Petersburger Spiel – Eine Abituraufgabe

von Dr.Peter Kasten

Im 18.Jahrhundert widmete man sich intensiv der Berechnung von Gewinnchancen bei Glücksspielen. Ein bekanntes war das "Petersburger Spiel", das der Mathematiker und Physiker Daniel Bernoulli (1700 – 1782) im Jahre 1738 in Petersburg beschrieb und analysierte. Verschiedene Mathematiker wie d´Alembert gaben dazu unterschiedliche, allerdings falsche Lösungen an. Diesen Konflikt griff Lichtenberg 1770 in seiner Antrittsvorlesung in Göttingen auf. Sie ist unter dem Titel „Betrachtungen über einige Methoden, eine gewisse Schwierigkeit in der Berechnung der Wahrscheinlichkeit beim Spiel zu heben" in den Schriften und Briefen (Hrsg. W. Promies) Bd.3, S. 9 - 23 (1972) , mit Anmerkungen im Kommentarband 3 nachzulesen.
Lichtenberg beschreibt darin zunächst allgemein, dass manchmal Widersprüche auftreten zwischen Lösungen, die uns im Alltag spontan einfallen, und dem Ergebnis einer exakten Rechnung. Anschließend stellt er als Beispiel das erwähnte Petersburger Spiel vor:

> *„Zwo Personen **A** und **B** werfen eine Münze in die Höhe, die z.B. auf der einen Seite mit **1** und auf der anderen mit **0** bezeichnet sein soll. **A**, der die Münze wirft, verspricht dem **B** einen Taler, wenn **1** im ersten Wurf fällt, 2 Taler wenn sie erst im zweiten Wurf, 4 Taler wenn sie erst im dritten, 8 wenn sie erst im vierten fällt, kurz, soll sie erst im **n** -ten Wurf fallen, so bezahlt **A** an **B** 2^{n-1} Taler, und sollte **n** auch noch so groß sein, sie wollen solange werfen bis **1** fällt. Die Frage ist: wie viel Gewinn kann sich **B** wahrscheinlicher Weise hieraus versprechen, oder wie viel muss er dem **A** voraus bezahlen , dass sich dieser ohne Schaden in ein solches Spiel einlassen kann. Nach den bekannten Regeln der Rechnung des Wahrscheinlichen ist das, was **B** bezahlen muss*

$$1 \cdot \tfrac{1}{2} + 2 \cdot \tfrac{1}{4} + 4 \cdot \tfrac{1}{8} + \cdots\, 2^n \cdot \tfrac{1}{2^{n+1}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdots + \tfrac{1}{2}$$

> *das ist unendlich viel, wenn **n** gar vorher nicht festgesetzt wird, und alle Schätze der Welt würden nicht zum Einsatz für den **B** hinreichen , da im*

Alle unsere Empfindungen sind Summen von vielen. Das Trennen hierbei wie z.E. die Libration die von der Umdrehung um die Axe des Mondes von derjenigen, die von seinem ungleichförmigen Umlauf herrührt. (D 727)

gemeinen Leben der größte Waghals von einem Spieler kaum 20 Taler in einem solchen Spiel wagen würde , und gleichwohl könnte er sein Geld, und noch 12 Taler dazu , wieder bekommen, wenn nur ***1*** *erst im sechsten Wurf fiele. Damit weniger Geübte nicht etwa glauben , der Widerspruch zwischen der Rechnung und dem Urteil des Spielers käme von der Voraussetzung her, dass* ***A*** *ins unendliche fort werfen könne, so darf man nur statt* ***n*** *eine beträchtliche Zahl, als z.B. 100 setzen, so ist der Einsatz des* ***B*** *50 Taler und damit kann er 2^{99} Taler gewinnen, ja fiele auch die* ***1*** *schon im zwanzigsten Wurf, so gewönne er 524 288 Taler.“*

Bei diesem Spiel kann der Gewinn also **erheblich** werden, die Wahrscheinlichkeit dafür ist allerdings sehr **gering**.
Welche Folgerungen können **A** und **B** daraus ziehen?
Wenn sie das Spiel beliebig oft wiederholen wollten, dann könnte sich **B** ohne Bedenken darauf einlassen, egal wie hoch der von **A** geforderte Einsatz wäre. Denn es wäre zu erwarten, dass **B**´s Gewinn irgendwann viel größer wäre als jeder noch so hohe Einsatz. Auch wäre es unklug von **A**, dem **B** ein solches Spiel überhaupt anzubieten, da **A** doch irgendwann mit einem so großen Verlust rechnen muss, egal wie hoch er den Einsatz für **B** festsetzen würde.
Das Paradoxe an diesem Spiel ist, dass sich **A** nicht auf das Spiel einlassen würde, weil er einen Verlust fürchtet, und dass **B** das Spiel vorschlägt, obwohl er sich dabei möglicherweise ruinieren würde.
Allen Lesern sei empfohlen, das Petersburger Spiel mit Münze, Bleistift und Papier mit einem „gefühlten Einsatz“ durchzuspielen. Das Ergebnis überrascht!
Dazu notiert Lichtenberg im Sudelbuch (A 250):

Herr Beguelin und Herr d´Alembert fragen immer an denen in meinem Programmate angeführten Stellen, welches denn die Grenzen von dem zu erwartenden Gewinst bei seltenen Fällen sei, wo man anfangen müsse sehr kleine Wahrscheinlichkeit für Gewissheit des Gegenteils zu erklären, oder wo die ganz verschwindende praktische Wahrscheinlichkeit sich in moralische Unmöglichkeit verliere. Diese Frage wird sich so wenig beantworten lassen, als die wo die großen Zahlen angehen und wo die kleinen aufhören.

Lichtenbergs Betrachtungen habe ich mit weiteren vertiefenden Fragestellungen zu folgender Abituraufgabe erweitert. Die Schülerinnen und Schüler sollten Lichtenbergs Ergebnisse nachvollziehen und zusätzliche statistische Untersuchungen durchführen:

Lichtenberg Gesamtschule Göttingen

Abitur 1996 Leistungsfach Mathematik Vorschlag B

Aufgabe 3

G.C.**Lichtenberg** trug 1770 bei seiner Antrittsvorlesung Probleme aus der damals noch neuen Wahrscheinlichkeitsrechnung vor:
Gegeben ist eine homogene Münze, deren Seiten mit **0** und **1** bezeichnet werden. Zwei Personen A und B vereinbaren ein „Spiel“:
A wirft eine Münze und „verspricht B einen Taler, wenn die **1** im 1. Wurf fällt, zwei Taler, wenn sie beim 2.Wurf, vier Taler, wenn sie beim 3. Wurf fällt, kurz: Sollte sie erst beim **n** - ten Wurf fallen, so bezahlt A an B $2^{(n-1)}$ Taler“.

3.1 Die Anzahl der Würfe sei auf n = 6 beschränkt. Falls dabei keine **1** fällt, erhält B nichts. Wie groß ist der Gewinn für B, falls die **1** erst beim 6.Wurf fällt und wenn für B als Einsatz 20 Taler vereinbart wurden?
Wie viel muss A an B bei n = 6 durchschnittlich auszahlen? Berechne auch die zugehörige Varianz **V(X).**
Wie hoch müsste der Einsatz für B vereinbart werden, damit ein faires Spiel vorliegt?

3.2 Zeige allgemein:
Werden für das Spiel maximal **n** Würfe zugelassen, so beträgt die durchschnittliche Auszahlung von A an B **E(X) = 0,5 n** Taler und die Varianz $\mathbf{V(X) = 2^{(n-1)} - 0{,}5 - 0{,}25\, n^2}$. Beachte , dass auch hier **n** mal die **0** fallen kann.

3.3 A und B vereinbaren nun maximal 100 Würfe und für B einen Einsatz von 50 Talern.
Wie hoch ist der Gewinn für B, falls die **1** zum ersten mal beim 20.Wurf fällt?
Wann dürfte die **1** frühestens fallen, damit die Auszahlung an B größer ist als sein Einsatz?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Ereignis eintritt?
Wie groß ist die W., dass bei dem vereinbarten Spiel B einen Gewinn erzielt?

3.4 **Lichtenberg** berichtete , dass die Lösungen solcher Aufgaben damals sehr umstritten waren. Der Mathematiker Beguelin behauptete z.B.:
Jemand hat beim Spiel viermal die **0** geworfen. Die W. , dass beim nächsten, dem 5.Wurf , eine **1** erscheint, wäre 1/5. Wie groß ist die W. tatsächlich und wie groß ist die W. für das Ereignis **00001**? Wie groß ist die W., dass bei n = 5 Würfen mindestens eine **1** fällt? Wie oft muss man werfen, wenn diese W. mindestens **99,9 %** betragen soll?

3.5 **Lichtenberg** erwähnte, dass er die Münze **240** mal geworfen habe. Kann man davon ausgehen, dass die Münze homogen ist, wenn er dabei **133** mal die **0** erhielte? Untersuche, ob man damit die Nullhypothese mit einer Irrtums-Wahrscheinlichkeit von **5%** ablehnen könnte.
Wie oft hätte **Lichtenberg** die Münze werfen müssen, wenn er **P(0)** mit einer Genauigkeit von mindestens **+/- 0.05** bei einer Vertrauenszahl von **95%** hätte ermitteln wollen?